GG23LM

સંમેય સંખ્યાઓ

પ્રકરણ

1

1.1 પ્રાસ્તાવિક

ગણિતશાસ્ત્રમાં આપણે સુરેખ (સાદા) સમીકરણને વારંવાર ઉકેલીએ છીએ. ઉદાહરણ તરીકે સમીકરણ

$$x + 2 = 13 \qquad (1)$$

જો સમીકરણ (1)માં આપણે $x = 11$ મૂકીએ, તો આ સમીકરણનો ઉકેલ મળે છે. કેમ કે xની કિંમત 11 મૂકતાં સમીકરણનું સમાધાન થાય છે. આ સમીકરણનો ઉકેલ 11 જે એક **પ્રાકૃતિક સંખ્યા (Natural Number)** છે. જ્યારે સમીકરણ

$$x + 5 = 5 \qquad (2)$$

સમીકરણ (2)નો ઉકેલ **પૂર્ણ સંખ્યા (Whole Number)** 0 (શૂન્ય) છે. જો આપણે માત્ર પ્રાકૃતિક સંખ્યા જ વિચારીએ તો સમીકરણ (2) ઉકેલી શકાય નહિ. સમીકરણ (2)ને ઉકેલવા માટે, પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓના સમૂહમાં 0 (શૂન્ય) ઉમેરવું પડે છે. આમ પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓમાં 0 (શૂન્ય) ઉમેરતાં પૂર્ણ સંખ્યાઓ મળે. પરંતુ પૂર્ણ સંખ્યાઓ પણ કેટલાંક સમીકરણ ઉકેલવા માટે પૂરતી નથી. જેવાં કે,

$$x + 18 = 5 \qquad (3)$$

તમે નિરીક્ષણ કર્યું કે, આવું કેમ ? આ સમીકરણ (3)ના ઉકેલ માટે (–13) સંખ્યાની જરૂર પડે છે. આ બાબત આપણને **પૂર્ણાંક (ધન, ઋણ અને શૂન્ય)** સંખ્યા તરફ દોરી જાય છે. અહીં નોંધીએ કે ધન પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ એ પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓને સંલગ્ન છે. હવે કોઈ એમ પણ વિચારી શકે કે આપણી પાસે સુરેખ સમીકરણોને ઉકેલવા માટે પૂરતી સંખ્યામાં પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ છે.

હવે નીચેનાં સમીકરણો ચકાસો.

$$2x = 3 \qquad (4)$$

$$5x + 7 = 0 \qquad (5)$$

ઉપરનાં કયાં સમીકરણો માટે આપણને પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ ઉકેલ તરીકે મળતી નથી. (તપાસો) આ બાબતની ચકાસણી કરતાં સમીકરણ (4) માટે $\frac{3}{2}$ અને સમીકરણ (5) માટે $\frac{-7}{5}$ સંખ્યાની જરૂર પડે છે. આ બાબત આપણને **સંમેય સંખ્યા** તરફ દોરી જાય છે.

આપણે **સંમેય સંખ્યા** પરની મૂળભૂત ક્રિયાઓ જોઈ ગયાં છીએ. હવે આપણે અત્યાર સુધી શીખેલ જુદા જુદા પ્રકારની સંખ્યાઓ માટેની ગાણિતિક ક્રિયાઓના ગુણધર્મો સમજવાનો પ્રયત્ન કરીએ.

1.2 સંમેય સંખ્યાઓના ગુણધર્મો

1.2.1 સંવૃત્તતા (Closure)

4X4WLJ

(i) પૂર્ણ સંખ્યાઓ (Whole numbers)

આવો, ફરી એક વખત સંક્ષેપમાં પૂર્ણ સંખ્યાઓ માટે બધી ક્રિયાઓ પર સંવૃત્તતાના ગુણધર્મની ચર્ચા કરીએ.

ક્રિયા	સંખ્યાઓ	નોંધ
સરવાળો	$0 + 5 = 5$, પૂર્ણ સંખ્યા છે. $4 + 7 = ...$ શું આ પૂર્ણ સંખ્યા છે ? સામાન્ય રીતે, કોઈપણ બે પૂર્ણ સંખ્યા a અને b માટે $a + b$ પૂર્ણ સંખ્યા છે.	સરવાળાની ક્રિયા માટે પૂર્ણ સંખ્યાઓ સંવૃત્ત છે.
બાદબાકી	$5 - 7 = -2$ એ પૂર્ણ સંખ્યા નથી.	બાદબાકીની ક્રિયા માટે પૂર્ણ સંખ્યાઓ સંવૃત્ત નથી.
ગુણાકાર	$0 \times 3 = 0$, પૂર્ણ સંખ્યા છે. $3 \times 7 = ...$ શું આ પૂર્ણ સંખ્યા છે ? સામાન્ય રીતે જો a અને b કોઈ પણ બે પૂર્ણ સંખ્યાઓ હોય તો તેનો ગુણાકાર ab પણ પૂર્ણ સંખ્યા જ હોય.	ગુણાકારની ક્રિયા માટે પૂર્ણ સંખ્યાઓ સંવૃત્ત છે.
ભાગાકાર	$5 \div 8 = \frac{5}{8}$, એ પૂર્ણ સંખ્યા નથી.	ભાગાકારની ક્રિયા માટે પૂર્ણ સંખ્યાઓ સંવૃત્ત નથી.

તમે પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓના સંદર્ભમાં પાયાની ચાર ક્રિયાઓ માટે સંવૃત્તતાના ગુણધર્મોની ચકાસણી કરો.

(ii) પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ (Integers)

હવે આપણે ફરીથી યાદ કરી લઈએ કે કઈ ક્રિયાઓ અંગે પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ સંવૃત્ત છે.

ક્રિયા	સંખ્યાઓ	નોંધ
સરવાળો	$-6 + 5 = -1$ એ પૂર્ણાંક સંખ્યા છે. $-7 + (-5)$ શું પૂર્ણાંક સંખ્યા છે ? શું $8 + 5$ એ પૂર્ણાંક સંખ્યા છે ? સામાન્ય રીતે કોઈ બે પૂર્ણાંકો a અને b માટે, $a + b$ એ પૂર્ણાંક સંખ્યા છે.	સરવાળાની ક્રિયા માટે પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ સંવૃત્ત છે.
બાદબાકી	$7 - 5 = 2$, એ પૂર્ણાંક સંખ્યા છે. શું $5 - 7$ એ પૂર્ણાંક સંખ્યા છે ? $-6 - 8 = -14$, એ પૂર્ણાંક સંખ્યા છે. $-6 - (-8) = 2$, એ પૂર્ણાંક સંખ્યા છે. શું $8 - (-6)$ એ પૂર્ણાંક સંખ્યા છે ? સામાન્ય રીતે કોઈ બે પૂર્ણાંકો a અને b માટે $a - b$ એ પૂર્ણાંક સંખ્યા છે. ચકાસો કે $b - a$ પણ પૂર્ણાંક સંખ્યા છે.	બાદબાકીની ક્રિયા માટે પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ સંવૃત્ત છે.

ગુણાકાર	$5 \times 8 = 40$, એ પૂર્ણાંક સંખ્યા છે. શું -5×8 એ પૂર્ણાંક સંખ્યા છે ? $-5 \times (-8) = 40$, એ પૂર્ણાંક સંખ્યા છે. સામાન્ય રીતે કોઈ પણ બે પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ a અને b માટે, $a \times b$ પણ એક પૂર્ણાંક સંખ્યા છે.	ગુણાકારની ક્રિયા માટે પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ સંવૃત્ત છે.
ભાગાકાર	$5 \div 8 = \frac{5}{8}$, એ પૂર્ણાંક સંખ્યા નથી.	ભાગાકારની ક્રિયા માટે પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ સંવૃત્ત નથી.

તમે જોયું કે પૂર્ણ સંખ્યાઓ સરવાળા અને ગુણાકારની ક્રિયા માટે સંવૃત્ત છે પણ બાદબાકી અને ભાગાકારની ક્રિયા માટે સંવૃત્ત નથી. જ્યારે પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ સરવાળો, બાદબાકી અને ગુણાકારની ક્રિયા માટે સંવૃત્ત છે, પણ ભાગાકારની ક્રિયા માટે સંવૃત્ત નથી.

(iii) સંમેય સંખ્યાઓ (Rational numbers)

તમે યાદ કરો કે જે સંખ્યાને $\frac{p}{q}$, (જ્યાં p અને q પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ છે અને $q \neq 0$) સ્વરૂપે લખી શકાય તેવી સંખ્યાને **સંમેય સંખ્યાઓ** કહે છે. ઉદાહરણ તરીકે : $-\frac{2}{3}, \frac{6}{7}, \frac{9}{-5}$ એ સંમેય સંખ્યાઓ છે. જ્યારે 0, –2, 4 ને પણ $\frac{p}{q}$ સ્વરૂપે લખી શકાય છે. તેથી તે પણ સંમેય સંખ્યાઓ છે. (ચકાસણી કરો !)

(a) બે સંમેય સંખ્યાઓનો સરવાળો કઈ રીતે થાય તે તમે જાણો છો. ચાલો, થોડી સંમેય સંખ્યાઓની જોડનો સરવાળો કરીએ.

$\frac{3}{8} + \frac{(-5)}{7} = \frac{21 + (-40)}{56} = \frac{-19}{56}$ (સંમેય સંખ્યા છે.)

$\frac{-3}{8} + \frac{(-4)}{5} = \frac{-15 + (-32)}{40} = \ldots$ શું આ સંમેય સંખ્યા છે ?

$\frac{4}{7} + \frac{6}{11} = \ldots$ શું આ સંમેય સંખ્યા છે ?

આપણને બે સંમેય સંખ્યાઓનો સરવાળો કરતાં સંમેય સંખ્યા મળે છે. વધુ સંમેય સંખ્યાઓની જોડ માટે ચકાસણી કરો.

આપણે કહી શકીએ કે સરવાળાની ક્રિયા માટે સંમેય સંખ્યાઓ સંવૃત્ત છે, *અર્થાત્ કોઈ પણ બે સંમેય સંખ્યાઓ a અને b માટે, $a + b$ પણ સંમેય સંખ્યા મળે છે.*

(b) શું બે સંમેય સંખ્યાઓનો તફાવત ફરીથી સંમેય સંખ્યા મળે ?

આપણી પાસે,

$$-\frac{5}{7} - \frac{2}{3} = \frac{-5 \times 3 - 2 \times 7}{21} = \frac{-29}{21}$$ (સંમેય સંખ્યા છે.)

$\frac{5}{8} - \frac{4}{5} = \frac{25-32}{40} = \ldots$ શું આ સંમેય સંખ્યા છે ?

$\frac{3}{7} - \left(\frac{-8}{5}\right) = \ldots$ શું આ સંમેય સંખ્યા છે ?

થોડી વધુ સંમેય સંખ્યાઓની જોડ માટે પ્રયત્ન કરો. આપણે કહી શકીએ કે બાદબાકીની ક્રિયા માટે સંમેય સંખ્યાઓ સંવૃત્ત છે. અર્થાત્, બે સંમેય સંખ્યાઓ a અને b માટે, $a - b$ પણ સંમેય સંખ્યા છે.

(c) ચાલો, બે સંમેય સંખ્યાઓના ગુણાકારની ક્રિયાઓમાં શું થાય છે તે આપણે જોઈએ.

$\frac{-2}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{-8}{15}$; $\frac{3}{7} \times \frac{2}{5} = \frac{6}{35}$ (બંનેનો ગુણાકાર સંમેય સંખ્યા છે.)

$\frac{-4}{5} \times \frac{-6}{11} = \ldots$ શું આ સંમેય સંખ્યા છે ?

તમે સંમેય સંખ્યાઓની વધુ જોડ લઈ ચકાસણી કરો કે તે સંખ્યાઓનો ગુણાકાર ફરીથી સંમેય સંખ્યા આવે છે કે નહીં.

આપણે કહી શકીએ કે, ગુણાકારની ક્રિયા માટે સંમેય સંખ્યાઓ સંવૃત્ત છે. *કેમ કે કોઈ પણ બે સંમેય સંખ્યાઓ a અને b માટે, $a \times b$ પણ સંમેય સંખ્યા છે.*

(d) આપણે નોંધીએ કે $\frac{-5}{3} \div \frac{2}{5} = \frac{-25}{6}$ (સંમેય સંખ્યા છે.)

$\frac{2}{7} \div \frac{5}{3} = \ldots$ શું આ સંમેય સંખ્યા છે ?

$\frac{-3}{8} \div \frac{-2}{9} = \ldots$ શું આ સંમેય સંખ્યા છે ?

શું તમે કહી શકો કે સંમેય સંખ્યાઓ ભાગાકારની ક્રિયા માટે સંવૃત્ત છે ? કોઈ સંમેય સંખ્યા a માટે $a \div 0$ એ **અવ્યાખ્યાયિત** છે. તેથી કહી શકાય કે ભાગાકારની ક્રિયા માટે સંમેય સંખ્યાઓ **સંવૃત્ત નથી.** જો કે આપણે શૂન્યને અપવાદ ગણીએ તો કહી શકાય કે ભાગાકારની ક્રિયા માટે સંમેય સંખ્યાઓ સંવૃત્ત છે.

પ્રયત્ન કરો

નીચેના કોષ્ટકમાં ખાલી જગ્યા પૂરો :

સંખ્યાઓ	ક્રિયા માટે સંવૃત્ત			
	સરવાળો	બાદબાકી	ગુણાકાર	ભાગાકાર
સંમેય સંખ્યાઓ	હા	હા	...	ના
પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ	...	હા	...	ના
પૂર્ણ સંખ્યાઓ	...	...	હા	...
પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓ	...	ના	...	...

1.2.2 ક્રમનો ગુણધર્મ (Commutativity)

(i) પૂર્ણ સંખ્યાઓ

પૂર્ણ સંખ્યાઓની જુદી-જુદી ક્રિયા માટે ક્રમના ગુણધર્મનો ઉપયોગ કરી કોષ્ટકની ખાલી જગ્યા ભરો.

ક્રિયા	સંખ્યાઓ	નોંધ
સરવાળો	$0 + 7 = 7 + 0 = 7$ $2 + 3 =$ ... + ... = ... કોઈ પણ બે પૂર્ણ સંખ્યાઓ a અને b માટે, $a + b = b + a$	સરવાળાની ક્રિયામાં ક્રમના ગુણધર્મનું પાલન થાય છે.
બાદબાકી	....	બાદબાકીની ક્રિયામાં ક્રમના ગુણધર્મનું પાલન થતું નથી.
ગુણાકાર	....	ગુણાકારની ક્રિયામાં ક્રમના ગુણધર્મનું પાલન થાય છે.
ભાગાકાર	....	ભાગાકારની ક્રિયામાં ક્રમના ગુણધર્મનું પાલન થતું નથી.

તમે પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓ માટે વિવિધ ક્રિયાઓ માટે ક્રમના ગુણધર્મનું પાલન થાય છે કે નહીં તે જાતે ચકાસો.

(ii) પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ

પૂર્ણાંક સંખ્યાઓમાં વિવિધ ક્રિયાઓ માટે ક્રમના ગુણધર્મનું પાલન થાય છે કે નહીં તે ચકાસણી કરી અને નીચેના કોષ્ટકમાં ખાલી જગ્યા પૂરો.

ક્રિયા	સંખ્યાઓ	નોંધ
સરવાળો	....	સરવાળાની ક્રિયામાં ક્રમના ગુણધર્મનું પાલન થાય છે.
બાદબાકી	શું $5 - (-3) = -3 - 5$?	બાદબાકીની ક્રિયામાં ક્રમના ગુણધર્મનું પાલન થતું નથી.
ગુણાકાર	....	ગુણાકારની ક્રિયામાં ક્રમના ગુણધર્મનું પાલન થાય છે.
ભાગાકાર	....	ભાગાકારની ક્રિયામાં ક્રમના ગુણધર્મનું પાલન થતું નથી.

(iii) સંમેય સંખ્યાઓ

(a) સરવાળો

તમે જાણો છો કે બે સંમેય સંખ્યાનો સરવાળો કઈ રીતે કરાય. ચાલો આપણે થોડીક સંમેય સંખ્યાઓના સરવાળા કરીએ.

$$\frac{-2}{3} + \frac{5}{7} = \frac{1}{21} \text{ અને } \frac{5}{7} + \left(\frac{-2}{3}\right) = \frac{1}{21}$$

તેથી, $\frac{-2}{3} + \frac{5}{7} = \frac{5}{7} + \left(\frac{-2}{3}\right)$

વળી, $\frac{-6}{5} + \left(\frac{-8}{3}\right) = \ldots$ અને $\frac{-8}{3} + \left(\frac{-6}{5}\right) = \ldots$

શું $\frac{-6}{5} + \left(\frac{-8}{3}\right) = \left(\frac{-8}{3}\right) + \left(\frac{-6}{5}\right)$ છે ?

શું $\frac{-3}{8} + \frac{1}{7} = \frac{1}{7} + \left(\frac{-3}{8}\right)$ છે ?

તમે જોયું કે બે સંમેય સંખ્યાઓનો કોઈ પણ ક્રમમાં સરવાળો કરીએ તો મળતી સંખ્યા સમાન જ આવે છે. તેથી કહી શકાય કે સંમેય સંખ્યાઓમાં સરવાળાની ક્રિયા માટે ક્રમના ગુણધર્મનું પાલન થાય છે. જેમ કે, કોઈ પણ બે સંમેય સંખ્યાઓ a અને b માટે, $a + b = b + a$.

(b) બાદબાકી

શું $\frac{2}{3} - \frac{5}{4} = \frac{5}{4} - \frac{2}{3}$ છે ?

શું $\frac{1}{2} - \frac{3}{5} = \frac{3}{5} - \frac{1}{2}$ છે ?

તમે જોશો કે સંમેય સંખ્યાઓમાં બાદબાકીની ક્રિયા માટે ક્રમના ગુણધર્મનું પાલન થતું નથી. અહીં નોંધો કે પૂર્ણાંક સંખ્યાઓમાં બાદબાકીની ક્રિયા માટે ક્રમના ગુણધર્મનું પાલન થતું નથી અને પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ સંમેય સંખ્યાઓ પણ છે.

તેથી સંમેય સંખ્યાઓમાં બાદબાકીની ક્રિયા માટે ક્રમના ગુણધર્મનું પાલન થતું નથી.

(c) ગુણાકાર

અહીં, $\frac{-7}{3} \times \frac{6}{5} = \frac{-42}{15} = \frac{6}{5} \times \left(\frac{-7}{3}\right)$

શું $\frac{-8}{9} \times \left(\frac{-4}{7}\right) = \frac{-4}{7} \times \left(\frac{-8}{9}\right)$ છે ?

આવી બીજી સંમેય સંખ્યાઓ લઈ ગુણાકાર માટે ક્રમના ગુણધર્મની ચકાસણી કરો.

તમને જાણવા મળશે કે બે સંમેય સંખ્યાઓનો કોઈ પણ ક્રમમાં ગુણાકાર કરીએ તો પણ મળતી સંખ્યા સમાન જ આવે છે. તેથી કહી શકાય કે સંમેય સંખ્યાઓમાં ગુણાકારની ક્રિયા માટે ક્રમના ગુણધર્મનું પાલન થાય છે.

સામાન્ય રીતે $a \times b = b \times a$ (કોઈ પણ બે સંમેય સંખ્યાઓ a અને b માટે)

(d) ભાગાકાર

શું $\frac{-5}{4} \div \frac{3}{7} = \frac{3}{7} \div \left(\frac{-5}{4}\right)$ છે ?

તમે જોશો કે બંને બાજુઓ સમાન થતી નથી. તેથી કહી શકાય કે સંમેય સંખ્યાઓમાં ભાગાકારની ક્રિયા માટે ક્રમના ગુણધર્મનું પાલન થતું નથી.

પ્રયત્ન કરો

નીચેનું કોષ્ટક પૂર્ણ કરો :

સંખ્યાઓ	ક્રમનો ગુણધર્મ			
	સરવાળો	બાદબાકી	ગુણાકાર	ભાગાકાર
સંમેય સંખ્યાઓ	હા	...	...	...
પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ	...	ના	...	...
પૂર્ણ સંખ્યાઓ	...	...	હા	...
પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓ	...	...	...	ના

1.2.3 જૂથનો ગુણધર્મ (Associativity)

(i) પૂર્ણ સંખ્યાઓ

નીચેના કોષ્ટકની મદદથી પૂર્ણ સંખ્યાઓ માટે પાયાની ચાર ક્રિયાઓ માટે જૂથના ગુણધર્મનો ઉપયોગ કરો.

ક્રિયા	સંખ્યાઓ	નોંધ
સરવાળો	....	સરવાળા માટે જૂથના ગુણધર્મનું પાલન થાય છે.
બાદબાકી	....	બાદબાકી માટે જૂથના ગુણધર્મનું પાલન થતું નથી.
ગુણાકાર	શું $7 \times (2 \times 5) = (7 \times 2) \times 5$? શું $4 \times (6 \times 0) = (4 \times 6) \times 0$? કોઈ પણ ત્રણ પૂર્ણ સંખ્યાઓ a, b અને c માટે $a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$	ગુણાકાર માટે જૂથના ગુણધર્મનું પાલન થાય છે.
ભાગાકાર	....	ભાગાકાર માટે જૂથના ગુણધર્મનું પાલન થતું નથી.

ઉપરના કોષ્ટકમાં ખાલી જગ્યા પૂરી અને છેલ્લા ખાનામાં કરેલ નોંધની ચકાસણી કરો. આ ઉપરાંત પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓ માટે જૂથના ગુણધર્મની ચકાસણી જાતે કરો.

(ii) પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ

પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ માટે ચાર ક્રિયાઓ અંગે જૂથના ગુણધર્મનું પાલન થાય છે કે કેમ તે નીચેના કોષ્ટકની મદદથી જોઈ શકાશે.

ક્રિયા	સંખ્યાઓ	નોંધ
સરવાળો	શું $(-2) + [3 + (-4)]$ $= [(-2) + 3] + (-4)$ થાય ? શું $(-6) + [(-4) + (-5)]$ $= [(-6) + (-4)] + (-5)$ થાય ? કોઈ પણ ત્રણ પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ a, b અને c માટે $a + (b + c) = (a + b) + c$	સરવાળાની ક્રિયામાં જૂથના ગુણધર્મનું પાલન થાય છે.
બાદબાકી	$5 - (7 - 3) = (5 - 7) - 3$ થાય ?	બાદબાકીની ક્રિયામાં જૂથના ગુણધર્મનું પાલન થતું નથી.
ગુણાકાર	શું $5 \times [(-7) \times (-8)]$ $= [5 \times (-7)] \times (-8)$ થાય ? શું $(-4) \times [(-8) \times (-5)]$ $= [(-4) \times (-8)] \times (-5)$ થાય ? કોઈ પણ ત્રણ પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ a, b અને c માટે, $a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$	ગુણાકારની ક્રિયામાં જૂથના ગુણધર્મનું પાલન થાય છે.
ભાગાકાર	શું $[(-10) \div 2] \div (-5)$ $= (-10) \div [2 \div (-5)]$ થાય ?	ભાગાકારની ક્રિયામાં જૂથના ગુણધર્મનું પાલન થતું નથી.

(iii) સંમેય સંખ્યાઓ

(a) સરવાળો

આપણી પાસે,

$$\frac{-2}{3} + \left[\frac{3}{5} + \left(\frac{-5}{6}\right)\right] = \frac{-2}{3} + \left(\frac{-7}{30}\right) = \frac{-27}{30} = \frac{-9}{10}$$

$$\left[-\frac{2}{3} + \frac{3}{5}\right] + \left(\frac{-5}{6}\right) = \frac{-1}{15} + \left(\frac{-5}{6}\right) = \frac{-27}{30} = \frac{-9}{10}$$

તેથી $\frac{-2}{3} + \left[\frac{3}{5} + \left(\frac{-5}{6}\right)\right] = \left[\frac{-2}{3} + \frac{3}{5}\right] + \left(\frac{-5}{6}\right)$

ઉપરાંત, $\frac{-1}{2} + \left[\frac{3}{7} + \left(\frac{-4}{3}\right)\right]$ અને $\left[\frac{-1}{2} + \frac{3}{7}\right] + \left(\frac{-4}{3}\right)$ શોધો.

શું બંનેનો સરવાળો સમાન આવે છે ?

બીજી સંમેય સંખ્યાઓ લઈને ઉપર મુજબ સરવાળો કરો અને તપાસો કે બંને સમાન આવે છે ? આપણે જોઈ શકીશું કે *સંમેય સંખ્યા માટે સરવાળાની ક્રિયામાં જૂથના ગુણધર્મનું પાલન થાય છે. તેથી કોઈ પણ સંમેય સંખ્યાઓ a, b અને c માટે,* $a + (b + c) = (a + b) + c$.

(b) બાદબાકી

તમે જાણો છો કે બાદબાકીની ક્રિયામાં પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ માટે જૂથના ગુણધર્મનું પાલન થતું નથી, તો સંમેય સંખ્યાઓ માટે

શું $\frac{-2}{3} - \left[\frac{-4}{5} - \frac{1}{2}\right] = \left[\frac{-2}{3} - \left(\frac{-4}{5}\right)\right] - \frac{1}{2}$ થાય ?

ઉપરની બાબતની ચકાસણી તમારી જાતે કરો.

સંમેય સંખ્યાઓ માટે બાદબાકીની ક્રિયામાં **જૂથના ગુણધર્મનું પાલન થતું નથી.**

(c) ગુણાકાર

ચાલો આપણે ગુણાકારની ક્રિયા માટે જૂથના ગુણધર્મની ચકાસણી કરીએ.

$$\frac{-7}{3} \times \left(\frac{5}{4} \times \frac{2}{9}\right) = \frac{-7}{3} \times \frac{10}{36} = \frac{-70}{108} = \frac{-35}{54}$$

$$\left(\frac{-7}{3} \times \frac{5}{4}\right) \times \frac{2}{9} = \ldots$$

આપણને મળશે કે, $\frac{-7}{3} \times \left(\frac{5}{4} \times \frac{2}{9}\right) = \left(\frac{-7}{3} \times \frac{5}{4}\right) \times \frac{2}{9}$

શું $\frac{2}{3} \times \left(\frac{-6}{7} \times \frac{4}{5}\right) = \left(\frac{2}{3} \times \frac{-6}{7}\right) \times \frac{4}{5}$ થાય ?

બીજી સંમેય સંખ્યાઓ લઈને ઉપર મુજબ ગુણાકાર કરો અને ચકાસો કે બંને ગુણાકાર સમાન આવે છે કે નહીં.

આપણે જોઈ શકીશું કે *સંમેય સંખ્યા માટે ગુણાકારની ક્રિયામાં જૂથના ગુણધર્મનું પાલન થાય છે. તેથી કોઈ પણ ત્રણ સંમેય સંખ્યાઓ a, b અને c માટે,* $a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$

(d) ભાગાકાર

યાદ કરો કે, પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ માટે જૂથના ગુણધર્મનું પાલન થતું નથી, તો પછી સંમેય સંખ્યાઓ માટે શું ?

અહીં, જો $\frac{1}{2} \div \left[\frac{-1}{3} \div \frac{2}{5}\right] = \left[\frac{1}{2} \div \left(\frac{-1}{3}\right)\right] \div \frac{2}{5}$ ચકાસીએ.

ડા. બા. $= \frac{1}{2} \div \left[\frac{-1}{3} \div \frac{2}{5}\right] = \frac{1}{2} \div \left(\frac{-1}{3} \times \frac{5}{2}\right)$ [$\because \frac{5}{2}$ એ $\frac{2}{5}$નો વ્યસ્ત છે.)

$= \frac{1}{2} \div \left(\frac{-5}{6}\right) = \ldots$

જ. બા.$= \left[\frac{1}{2} \div \left(\frac{-1}{3}\right)\right] \div \frac{2}{5}$

$= \left(\frac{1}{2} \times \frac{-3}{1}\right) \div \frac{2}{5} = \frac{-3}{2} \div \frac{2}{5} = \ldots$

શું ડા.બા. = જ.બા. થાય છે ? જાતે ચકાસણી કરો. તમને જાણવા મળશે કે સંમેય સંખ્યાઓ માટે ભાગાકારની ક્રિયામાં જૂથના ગુણધર્મનું પાલન થતું નથી.

પ્રયત્ન કરો

નીચેનું કોષ્ટક પૂર્ણ કરો :

સંખ્યાઓ	જૂથનો ગુણધર્મ			
	સરવાળો	બાદબાકી	ગુણાકાર	ભાગાકાર
સંમેય સંખ્યાઓ	...	...	...	ના
પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ	...	...	હા	...
પૂર્ણ સંખ્યાઓ	હા	...	...	...
પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓ	...	ના	...	...

ઉદાહરણ 1 : $\frac{3}{7} + \left(\frac{-6}{11}\right) + \left(\frac{-8}{21}\right) + \left(\frac{5}{22}\right)$ની કિંમત શોધો.

ઉકેલ : $\frac{3}{7} + \left(\frac{-6}{11}\right) + \left(\frac{-8}{21}\right) + \left(\frac{5}{22}\right)$

$= \frac{198}{462} + \left(\frac{-252}{462}\right) + \left(\frac{-176}{462}\right) + \left(\frac{105}{462}\right)$ [7, 11, 21 અને 22નો લ.સા.અ. 462 થાય.]

$= \frac{198 - 252 - 176 + 105}{462} = \frac{-125}{462}$

આ ઉદાહરણ નીચે પ્રમાણે પણ ઉકેલી શકાય :

$\frac{3}{7} + \left(\frac{-6}{11}\right) + \left(\frac{-8}{21}\right) + \frac{5}{22}$

$= \left[\frac{3}{7} + \left(\frac{-8}{21}\right)\right] + \left[\frac{-6}{11} + \frac{5}{22}\right]$ (ક્રમના અને જૂથના ગુણધર્મનો ઉપયોગ કરતાં)

$= \left[\frac{9 + (-8)}{21}\right] + \left[\frac{-12 + 5}{22}\right]$

[7 અને 21નો લ.સા.અ 21; 11 અને 22નો લ.સા.અ. 22]

$= \frac{1}{21} + \left(\frac{-7}{22}\right)$

$= \frac{22 - 147}{462}$

$= \frac{-125}{462}$

શું તમને લાગે છે કે ક્રમનો ગુણધર્મ અને જૂથનો ગુણધર્મ આ ગણતરીને સરળ બનાવે છે ?

ઉદાહરણ 2 : કિંમત શોધો : $\frac{-4}{5} \times \frac{3}{7} \times \frac{15}{16} \times \left(\frac{-14}{9}\right)$

ઉકેલ : આપણી પાસે $\frac{-4}{5} \times \frac{3}{7} \times \frac{15}{16} \times \left(\frac{-14}{9}\right)$

$= \left[-\frac{4 \times 3}{5 \times 7}\right] \times \left[\frac{15 \times (-14)}{16 \times 9}\right]$

$= \frac{-12}{35} \times \left(\frac{-35}{24}\right) = \frac{-12 \times (-35)}{35 \times 24} = \frac{1}{2}$

આ ગણતરી બીજી રીતે પણ કરી શકાય.

$\frac{-4}{5} \times \frac{3}{7} \times \frac{15}{16} \times \left(\frac{-14}{9}\right)$

$= \left(-\frac{4}{5} \times \frac{15}{16}\right) \times \left[\frac{3}{7} \times \left(\frac{-14}{9}\right)\right]$ (ક્રમના અને જૂથના ગુણધર્મનો ઉપયોગ કરતાં)

$= \frac{-3}{4} \times \left(\frac{-2}{3}\right) = \frac{1}{2}$

1.2.4 શૂન્યની ભૂમિકા

નીચેના પદ જુઓ :

$2 + 0 = 0 + 2 = 2$ (પૂર્ણ સંખ્યામાં શૂન્ય ઉમેરતાં)

$-5 + 0 = \ldots + \ldots = -5$ (પૂર્ણાંક સંખ્યામાં શૂન્ય ઉમેરતાં)

$\frac{-2}{7} + \ldots = 0 + \left(\frac{-2}{7}\right) = \frac{-2}{7}$ (સંમેય સંખ્યામાં શૂન્ય ઉમેરતાં)

તમે આવા સરવાળા પહેલાં પણ કરેલ છે. ચાલો, આવા બીજા વધુ સરવાળા કરીએ.

તમે શું જોયું ? જ્યારે પૂર્ણ સંખ્યામાં શૂન્ય ઉમેરવામાં આવે તો મળતી સંખ્યા પણ પૂર્ણ છે. આવું પૂર્ણાંક અને સંમેય સંખ્યા માટે પણ બને છે.

સામાન્ય રીતે, $a + 0 = 0 + a = a$ જ્યાં, a એ પૂર્ણ સંખ્યા છે.

$b + 0 = 0 + b = b$ જ્યાં b એ પૂર્ણાંક સંખ્યા છે.

$c + 0 = 0 + c = c$ જ્યાં c એ સંમેય સંખ્યા છે.

આમ, શૂન્યને સરવાળા માટેનો તટસ્થ ઘટક (એકમ ઘટક) કહે છે. તે પૂર્ણાંક અને પૂર્ણ સંખ્યા માટે પણ સરવાળાનો તટસ્થ ઘટક છે.

1.2.5 1ની ભૂમિકા

અહીં,

$5 \times 1 = 5 = 1 \times 5$ (પૂર્ણ સંખ્યાને 1 વડે ગુણતાં)

$\frac{-2}{7} \times 1 = \ldots \times \ldots = \frac{-2}{7}$

$\frac{3}{8} \times \ldots = 1 \times \frac{3}{8} = \frac{3}{8}$

તમે શું જોયું ?

જ્યારે આપણે સંમેય સંખ્યાને 1 વડે ગુણીએ છીએ, ત્યારે એ જ સંમેય સંખ્યા નીપજ તરીકે મળે છે. આ બાબતની અન્ય સંમેય સંખ્યાઓ સાથે ગુણાકાર કરી ચકાસણી કરો. આપણને જોવા મળશે. કોઈ પણ સંમેય સંખ્યા a માટે $a \times 1 = 1 \times a = a$.

આપણે કહી શકીએ કે ***1 એ ગુણાકાર માટેનો તટસ્થ ઘટક (એકમ ઘટક) છે.***

શું 1 એ પૂર્ણાંક સંખ્યા માટે તટસ્થ ઘટક છે ? શું તે પૂર્ણ સંખ્યા માટે તટસ્થ ઘટક છે ?

વિચારો, ચર્ચા કરો અને લખો

જો કોઈ ગુણધર્મ સંમેય સંખ્યા માટે સાચો હોય તો તે પૂર્ણાંક સંખ્યા માટે પણ સાચો હોય ? પૂર્ણ સંખ્યા માટે શું કહી શકાય ? ક્યારે સાચો અને ક્યારે સાચો નહીં ?

1.2.6 સંમેય સંખ્યા માટે ગુણાકારનું સરવાળા પર વિભાજન

આ બાબતને સમજવા માટે, ચાલો $\frac{-3}{4}$, $\frac{2}{3}$ અને $\frac{-5}{6}$ સંમેય સંખ્યાઓ લઈએ.

હવે, $\frac{-3}{4} \times \left\{\frac{2}{3} + \left(\frac{-5}{6}\right)\right\} = \frac{-3}{4} \times \left\{\frac{(4) + (-5)}{6}\right\}$

$= \frac{-3}{4} \times \left(\frac{-1}{6}\right) = \frac{3}{24} = \frac{1}{8}$

પણ $\frac{-3}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{-3 \times 2}{4 \times 3} = \frac{-6}{12} = \frac{-1}{2}$

અને $\frac{-3}{4} \times \frac{-5}{6} = \frac{5}{8}$

આથી, $\left(\frac{-3}{4} \times \frac{2}{3}\right) + \left(\frac{-3}{4} \times \frac{-5}{6}\right) = \frac{-1}{2} + \frac{5}{8} = \frac{1}{8}$

આમ, $\frac{-3}{4} \times \left\{\frac{2}{3} + \left(\frac{-5}{6}\right)\right\} = \left(\frac{-3}{4} \times \frac{2}{3}\right) + \left(\frac{-3}{4} \times \frac{-5}{6}\right)$

ગુણાકારનું સરવાળા પર અને બાદબાકી પર વિભાજન

કોઈ પણ સંમેય સંખ્યા a, b અને c માટે,

$a\ (b + c) = ab + ac$

$a\ (b - c) = ab - ac$

પ્રયત્ન કરો

વિભાજનના ગુણધર્મનો ઉપયોગ કરી શોધો : (i) $\left\{\frac{7}{5} \times \left(\frac{-3}{12}\right)\right\} + \left\{\frac{7}{5} \times \frac{5}{12}\right\}$ (ii) $\left\{\frac{9}{16} \times \frac{4}{12}\right\} + \left\{\frac{9}{16} \times \frac{-3}{9}\right\}$

ઉદાહરણ 3 : કિંમત શોધો : $\frac{2}{5} \times \frac{-3}{7} - \frac{1}{14} - \frac{3}{7} \times \frac{3}{5}$

ઉકેલ : અહીં, $\frac{2}{5} \times \frac{-3}{7} - \frac{1}{14} - \frac{3}{7} \times \frac{3}{5} = \frac{2}{5} \times \frac{-3}{7} - \frac{3}{7} \times \frac{3}{5} - \frac{1}{14}$

[ક્રમનો ગુણધર્મ]

$= \frac{2}{5} \times \left(\frac{-3}{7}\right) + \left(\frac{-3}{7}\right) \times \frac{3}{5} - \frac{1}{14}$

$= \frac{-3}{7}\left(\frac{2}{5} + \frac{3}{5}\right) - \frac{1}{14}$ [વિભાજનનો ગુણધર્મ]

$= \frac{-3}{7} \times 1 - \frac{1}{14}$

$= \frac{-6 - 1}{14}$

$= \frac{-1}{2}$

સ્વાધ્યાય 1.1

1. નીચે આપેલ ગુણાકારની ક્રિયામાં કયા ગુણધર્મનો ઉપયોગ થયેલ છે તે જણાવો.

(i) $\frac{-4}{5} \times 1 = 1 \times \frac{-4}{5} = -\frac{4}{5}$ (ii) $\frac{-13}{17} \times \frac{-2}{7} = \frac{-2}{7} \times \frac{-13}{17}$

(iii) $\frac{-19}{29} \times \frac{29}{-19} = 1$

2. $\frac{1}{3} \times \left(6 \times \frac{4}{3}\right)$ની $\left(\frac{1}{3} \times 6\right) \times \frac{4}{3}$ રીતે ગણતરી કયા ગુણધર્મના ઉપયોગથી કરી શકાય તે જણાવો.

3. બે સંમેય સંખ્યાનો ગુણાકાર હંમેશા _____ જ હોય.

આપણે શું ચર્ચા કરી ?

1. સંમેય સંખ્યાઓ સરવાળો, બાદબાકી અને ગુણાકારની ક્રિયા અંગે **સંવૃત્ત** હોય છે.
2. સરવાળા અને ગુણાકારની ક્રિયા દરમ્યાન,
   (i) સંમેય સંખ્યાઓ માટે **ક્રમના ગુણધર્મ**નું પાલન થાય છે.
   (ii) સંમેય સંખ્યાઓ માટે **જૂથના ગુણધર્મ**નું પાલન થાય છે.
3. સંમેય સંખ્યા શૂન્ય (0) એ સંમેય સંખ્યાઓ માટે **સરવાળાનો તટસ્થ** ઘટક છે.
4. સંમેય સંખ્યા 1 (એક) એ સંમેય સંખ્યાઓ માટે **ગુણાકારનો તટસ્થ** ઘટક છે.
5. સંમેય સંખ્યા માટે **વિભાજનનો ગુણધર્મ** : સંમેય સંખ્યાઓ a, b અને c માટે,
   $a(b+c) = ab + ac$ અને $a(b-c) = ab - ac$
6. કોઈ પણ બે સંમેય સંખ્યાઓની વચ્ચે અગણિત સંમેય સંખ્યાઓ આવેલ હોય છે. બે સંખ્યાઓના **મધ્યક**નો ખ્યાલ બે સંખ્યાઓ વચ્ચેની સંખ્યાઓ શોધવામાં મદદરૂપ બને છે.